# Álgebra Linear Aplicada a Ciência de Dados

Professor Dr. Marcelo Guterres
Supervisor acadêmico Prof. Dr. Ernesto C. Marujo

18 de junho de 2018

MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades

# MATRIZES

# Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores

MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades

- ✔ Um escalar é um número simples;
- ✔ Um vetor é um array de números;

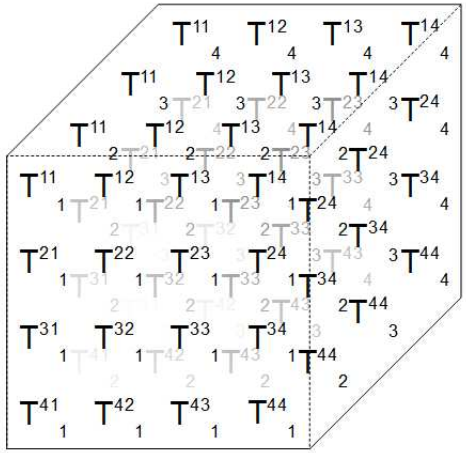
# Notação Matricial

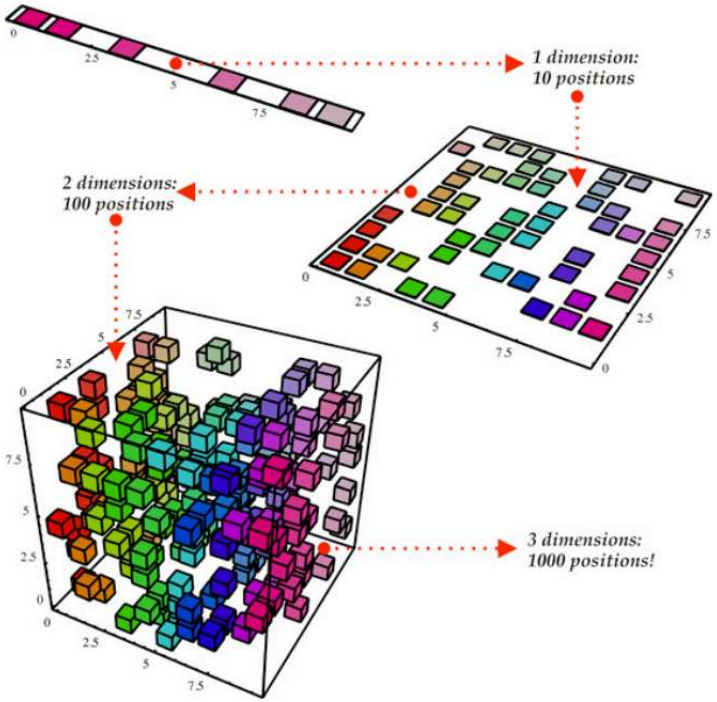
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \cdots & A_{m,n} \end{bmatrix}$$

# Tensor


MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades

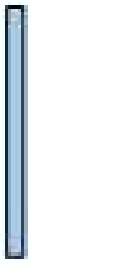

$$\left( T^{i\,j}_{\;k} \right)_{1 \le i,\, j,\, k \le 4} =$$



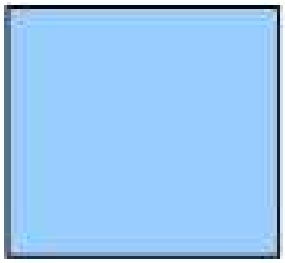


# Tensor

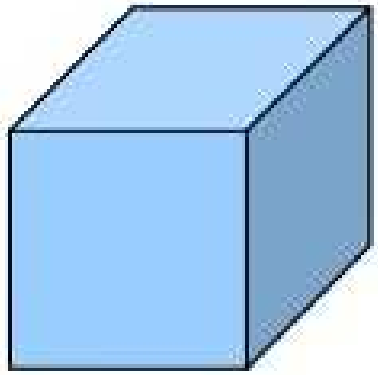
MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades



1d-tensor

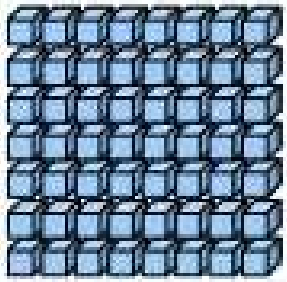


2d-tensor

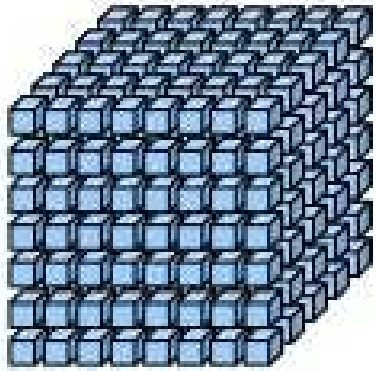


3d-tensor

4d-tensor



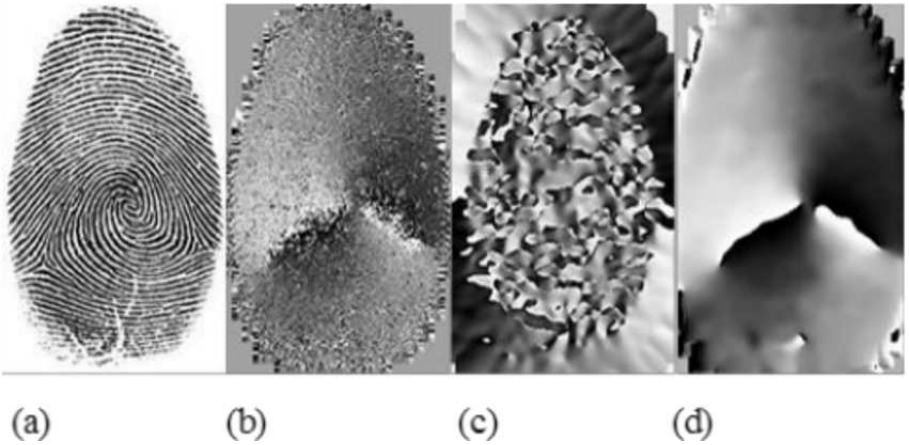
5d-tensor

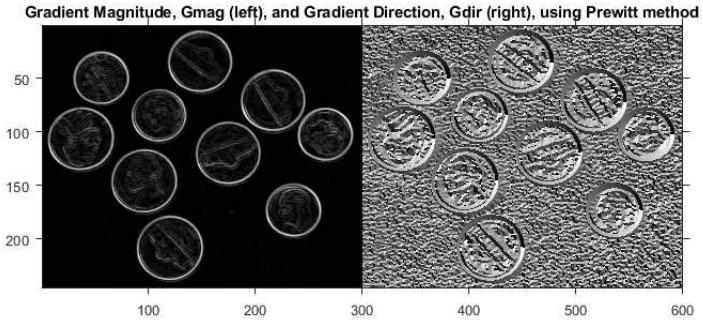


6d-tensor

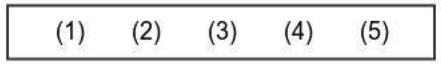
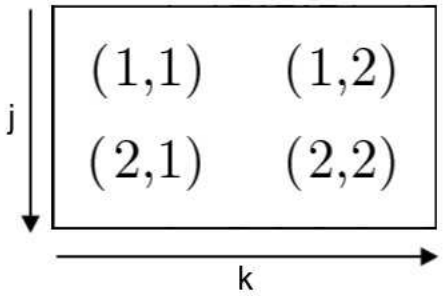
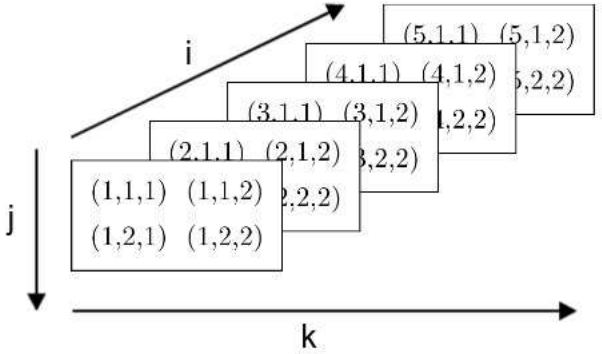
# Tensor

MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades



# Tensor

| 0-D Tensor (Scalar) | 1-D Tensor (Vector) | 2-D Tensor (Matrix) | 3-D Tensor |
|---|---|---|---|
| 1 |  |  |  |
| NA | (k) | (j, k) | (i, j, k) |

Pythom $\rightarrow$ *import tensorflow as tf*

# Convenções

MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades

- ✔ Um tensor é um array n-dimensional com n> 2
- ✔ Seguiremos as convenções usadas no Deep Learning:
  - ✘ os escalares são escritos em letras minúsculas e itálicos. Por exemplo: $n$
  - ✘ os vetores são escritos em letras minúsculas, itálicos e negrito. Por exemplo$x$
  - ✘ as matrizes são escritas em maiúsculas, itálicas e negrito. Por exemplo:$X$

Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades

# Tensorflow

O TensorFlow é uma biblioteca de computação numérica desenvolvida pelo Goolge e feita open source em 2015, tornando-se rapidamente a mais famosa e recomendada para Deep Learning. No início de 2017, o TensorFlow saiu da sua versão beta (de testes) e ganhou suporte para o Windows. Dentre as companhias que usam o TensorFlow estão Airbnb, Airbus, Dropbox, ebay, IBM, Intel, Snapchat, Twitter e Uber.

https://matheusfacure.github.io/2017/05/12/tens

MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades


```
# Scalar
> 3

# Matrix
> [[1, 2, 3],
   [4, 5, 6],
   [7, 8, 9]]
```

```
# Vector
> [1, 2, 3]

# 3-D Tensor
> [[ [0,0], [0,1], [0,2] ],
   [ [1,0], [1,1], [1,2] ],
   [ [2,0], [2,1], [2,2] ]
```

- NumPy

```
# Matrix as NumPy Array
> np.array([[1, 2, 3],
            [4, 5, 6],
            [7, 8, 9]],
           dtype=np.int64)
```

# Transposição

Transposição: Com a transposição, você pode converter um vetor de linha em um vetor de coluna e vice-versa:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A transposta $A^T$ da matriz $A$ corresponde aos eixos espelhados. Se a matriz é uma matriz quadrada (mesmo número de colunas e linhas):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

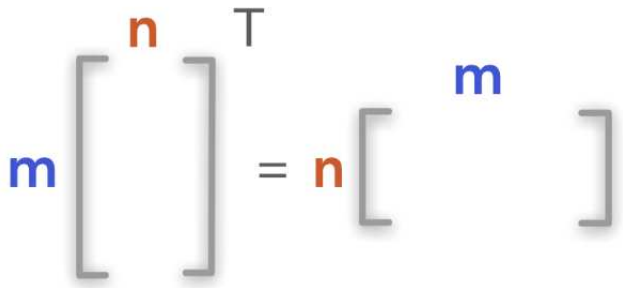
# Transposição

O sobrescrito $T$ é usado para matrizes transpostas.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix}$$

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} \end{bmatrix}$$

A forma $(m \times n)$ é invertida e se torna $(n \times m)$.



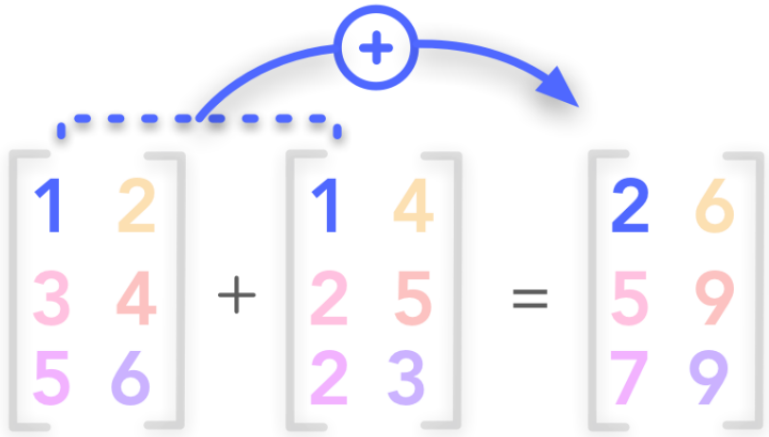
# Adição

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

# Adição

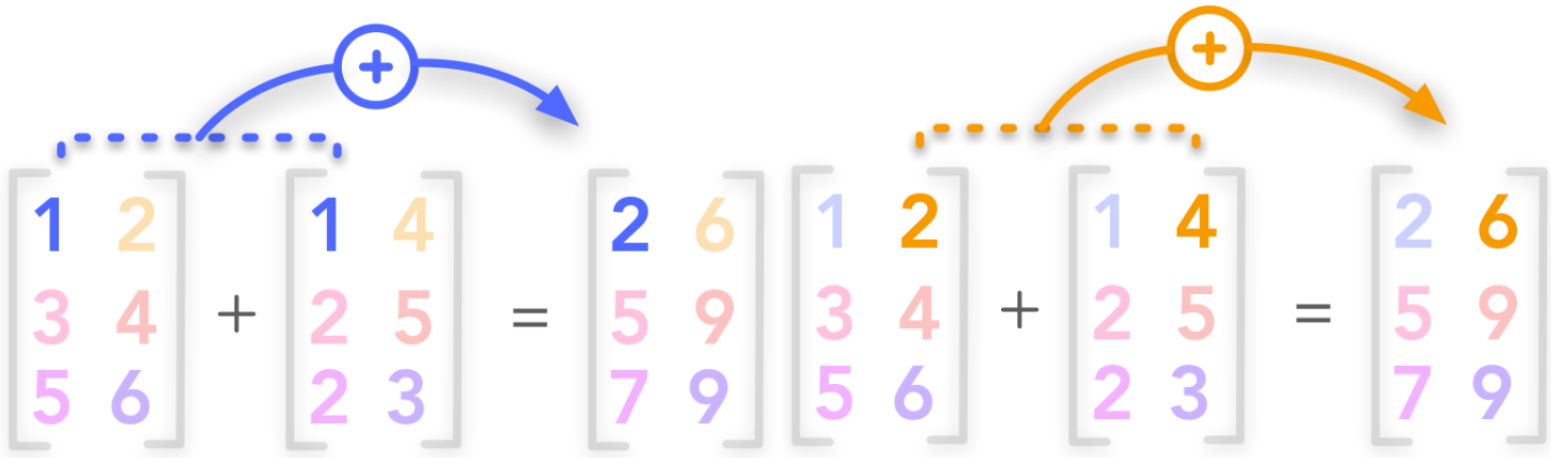
MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$



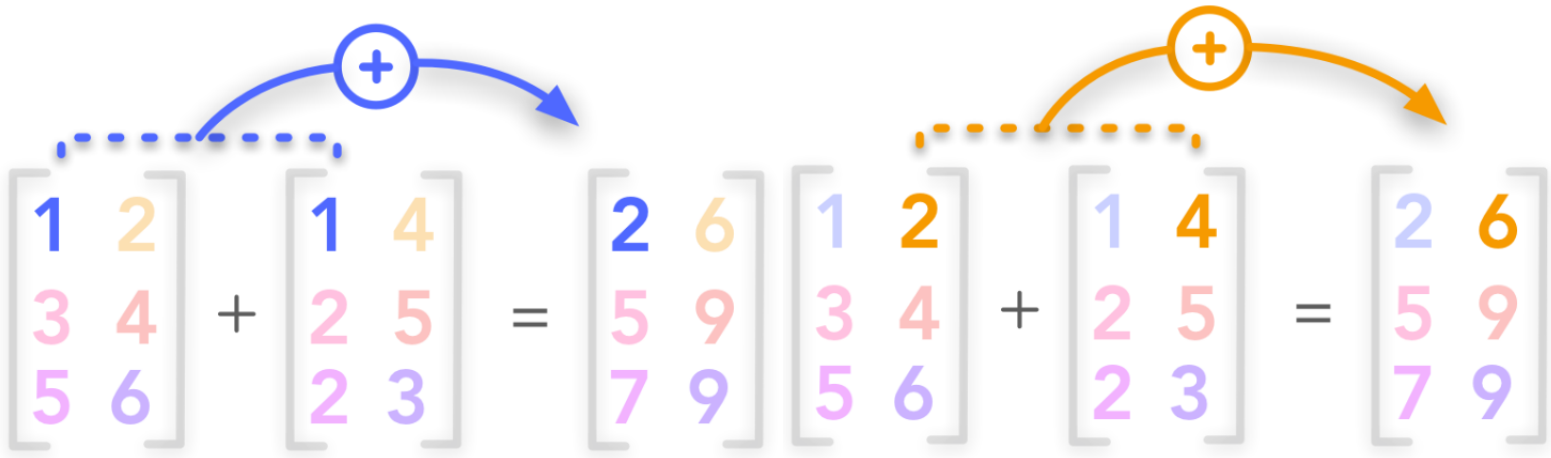
# Adição

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$



# Adição

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$



# Adição

Matrizes podem ser adicionadas se tiverem a mesma forma:

$$A + B = C$$

Cada célula de $A$ é adicionada à célula correspondente de $B$:

$$A_{i,j} + B_{i,j} = C_{i,j}$$

$i$ é o índice da linha e $j$ o índice da coluna.

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{3,1} & B_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \\ C_{3,1} & C_{3,2} \end{bmatrix}$$

# Adição

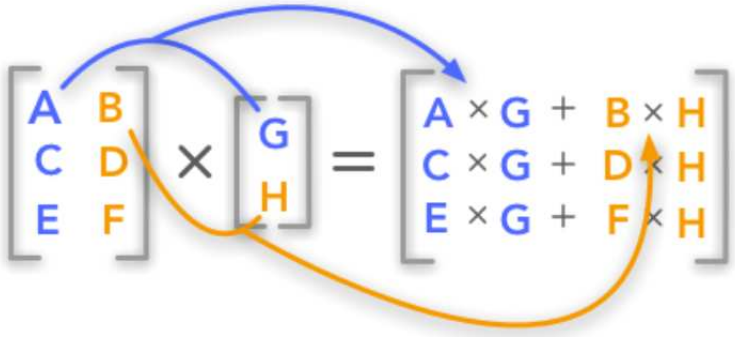
Também é possível adicionar um escalar a uma matriz. Isso significa adicionar este escalar a cada célula da matriz.

$$\alpha + \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + A_{1,1} & \alpha + A_{1,2} \\ \alpha + A_{2,1} & \alpha + A_{2,2} \\ \alpha + A_{3,1} & \alpha + A_{3,2} \end{bmatrix}$$

# Multiplicação

MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades

A maneira padrão de multiplicar matrizes não é multiplicar cada elemento de um com cada elemento do outro (este é o produto elementar), mas calcular a soma dos produtos entre linhas e colunas. O produto matriz, também chamado produto escalar, é calculado da seguinte forma:




O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz. Assim, se as dimensões, ou a forma da primeira matriz, forem $(m \times n)$, a segunda matriz precisa ser de forma $(n \times x)$. A matriz resultante terá a forma $(m \times x)$.

# Exemplo 1

$$A \times b = c$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \end{bmatrix}$$

# Exemplo 1

$$A \times b = c$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1}b_{1,1} + A_{1,2}b_{2,1} \\ A_{2,1}b_{1,1} + A_{2,2}b_{2,1} \\ A_{3,1}b_{1,1} + A_{3,2}b_{2,1} \end{bmatrix}$$

# Exemplo 1


MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades


$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

# Exemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 4 \\ 3 \times 2 + 4 \times 4 \\ 5 \times 2 + 6 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 22 \\ 34 \end{bmatrix}$$

# Formalização

$$C_{i,j} = A_{i,k}B_{k,j} = \sum_{k} A_{i,k}B_{k,j}$$

# Formalização

$$C_{i,j} = A_{i,k}B_{k,j} = \sum_k A_{i,k}B_{k,j}$$

```
MATRIX-MULTIPLY(A, B)
1  if columns[A] ≠ rows[B]
2     then error "incompatible dimensions"
3     else for i ← 1 to rows[A]
4               do for j ← 1 to columns[B]
5                     do C[i, j] ← 0
6                        for k ← 1 to columns[A]
7                           do C[i, j] ← C[i, j] + A[i, k] · B[k, j]
8          return C
```

# Propriedades

Vamos agora ver algumas propriedades interessantes da multiplicação de matrizes. Será útil à medida que avançamos nos módulos. Usar exemplos simples para cada propriedade fornecerá uma maneira de verificá-los enquanto nos acostumamos com as funções Numpy.

✔ A multiplicação de matrizes é distributiva:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

# Exemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) =$$

# Exemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \times \left( \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 9 + 3 \times 5 \\ 1 \times 9 + 4 \times 5 \\ 7 \times 9 + 6 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 29 \\ 93 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

$$\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC} =$$

# Exemplo

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 5+3\times 2 \\ 1\times 5+4\times 2 \\ 7\times 5+6\times 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\times 4+3\times 3 \\ 1\times 4+4\times 3 \\ 7\times 4+6\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \\ 47 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 \\ 16 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 29 \\ 93 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 5+3\times 2 \\ 1\times 5+4\times 2 \\ 7\times 5+6\times 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\times 4+3\times 3 \\ 1\times 4+4\times 3 \\ 7\times 4+6\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 \\ 13 \\ 47 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 \\ 16 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 29 \\ 93 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$$

# Propriedades

- ✔ A multiplicação de matrizes não é comutativa

$$AB \neq BA$$

- ✔ No entanto, a multiplicação de vetores é comutativa

$$x^T y = y^T x$$

# Propriedades

- ✔ Simplificação do produto matricial

$$(AB)^T = B^T A^T$$

# Matriz identidade

A matriz de identidade ou a inversa de uma matriz são conceitos que serão muito úteis nos próximos assuntos. Veremos no final deste módulo que podemos resolver sistemas de equações lineares usando a matriz inversa.

# Matriz identidade

MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades

A matriz de identidade $I_n$ é uma matriz especial de forma$(n \times n)$ que é preenchida com $0$, exceto a diagonal que é preenchida com $1$.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Matriz identidade

A matriz de identidade $I_n$ é uma matriz especial de forma$(n \times n)$ que é preenchida com $0$, exceto a diagonal que é preenchida com $1$.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz identidade $I_3 = 3 \times 3$.

# Matriz identidade

MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades

Quando "aplicar" a matriz de identidade a um vetor, o resultado é o mesmo vetor:

$$I_n x = x$$

# Matriz identidade

Quando "aplicar" a matriz de identidade a um vetor, o resultado é o mesmo vetor:

$$I_n x = x$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times x_1 + 0 \times x_2 + 0 \times x_3 \\ 0 \times x_1 + 1 \times x_2 + 0 \times x_3 \\ 0 \times x_1 + 0 \times x_2 + 1 \times x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

# Matriz identidade

MATRIZES
Escalares, Vetores, Matrizes e Tensores
Notação Matricial
Tensor
Tensor
Tensor
Tensor
Convenções
Tensorflow
Pythom
Transposição
Transposição
Adição
Adição
Adição
Multiplicação
Exemplo 1
Exemplo 1
Formalização
Propriedades
Exemplo
Exemplo
Propriedades
Propriedades

Você pode pensar em uma matriz como uma maneira de transformar objetos em um espaço n-dimensional. Aplica uma transformação linear do espaço.